Correction du Devoir maison n°1

Exercice n°1 :

Les nombres 1 261 et 403 sont-ils premiers entre eux ? Justifier la réponse.

Deux nombres sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun (et donc leur PGCD est égal à 1).

Première méthode : On calcule le PGCD en utilisant par exemple l'algorithme d'Euclide :

$1\,261 = 403 \times 3 + 52$
$403 = 52 \times 7 + 39$
$52 = 39 \times 1 + 13$
$39 = 13 \times 3 + 0$

PGCD(1 261 ; 403) = 13 donc 1 261 et 403 ne sont pas premiers entre eux.

Deuxième méthode : On cherche s'il existe un entier autre que 1 qui divise 1 261 et 403

Après plusieurs essais à la calculatrice ou en utilisant un tableur, on trouve que $1\,261 = 13 \times 97$ et $403 = 13 \times 31$

13 est un diviseur commun à 1 261 et 403
donc 1 261 et 403 ne sont pas premiers entre eux.

	A	B	C
1	d	1261/d	403/d
2	1	1261	403
3	2	630,5	201,5
4	3	420,33333	134,33333
5	4	315,25	100,75
6	5	252,2	80,6
7	6	210,16667	67,166667
8	7	180,14286	57,571429
9	8	157,625	50,375
10	9	140,11111	44,777778
11	10	126,1	40,3
12	11	114,63636	36,636364
13	12	105,08333	33,583333
14	13	97	31
15	14	90,071429	28,785714
16	15	84,066667	26,866667

Exercice n°2 :

La fraction $\dfrac{33\,333\,333\,333}{9\,999\,999\,999}$ est-elle simplifiable ? Si oui, donner sa forme irréductible.

Cette fraction est simplifiable puisque 33 333 333 333 et 9 999 999 999 sont deux multiples de 3.

En principe, la calculatrice sait simplifier une fraction mais ses capacités ne lui permettent pas de simplifier celle-là. Et même en la simplifiant une première fois par 3, on reste hors capacités.

$\dfrac{33\,333\,333\,333}{9\,999\,999\,999} = \dfrac{11\,111\,111\,111}{3\,333\,333\,333}$ Est-ce une fraction irréductible ?

Pour le savoir, il suffit de déterminer si 11 111 111 111 et 3 333 333 333 sont premiers entre eux.
On peut calculer leur PGCD en utilisant l'algorithme d'Euclide mais la encore, on dépasse les capacités de la touche $\boxed{\div R}$. Il faut donc soit utiliser un tableur, soit faire les premières étapes à la main.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	=	b	x	q	+	r
2	11111111111	=	3333333333	x	3	+	1111111112
3	3333333333	=	1111111112	x	2	+	1111111109
4	1111111112	=	1111111109	x	1	+	3
5	1111111109	=	3	x	370370369	+	2
6	3	=	2	x	1	+	1
7	2	=	1	x	2	+	0

Le PGCD de 11 111 111 111 et 3 333 333 333 est 1 donc la forme irréductible est bien $\dfrac{11\,111\,111\,111}{3\,333\,333\,333}$.

On aurait aussi pu prouver que le PGCD de 33 333 333 333 et 9 999 999 999 est 3 pour conclure.

Exercice n°3 :

Trouver une fraction irréductible comprise entre $\dfrac{14}{15}$ et $\dfrac{15}{16}$.

$\dfrac{14}{15} \approx 0{,}933$ et $\dfrac{15}{16} = 0{,}9375$ $\qquad \dfrac{14}{15} < 0{,}935 < \dfrac{15}{16}$ $\qquad 0{,}935 = \dfrac{935}{1000} = \dfrac{187}{200}$

$\dfrac{187}{200}$ est une fraction irréductible comprise entre $\dfrac{14}{15}$ et $\dfrac{15}{16}$ mais il en existe bien d'autres !