I- PUISSANCES D'UN NOMBRE

1) Puissance d'exposant positif

Définition : Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et a un nombre relatif.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

a^n se lit « a puissance n » ou « a exposant n ».

Exemples :

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \frac{8}{27}$

$2\,000^1 = 2\,000$

$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

$0^{32} = 0$

Remarque : a^2 se lit « a au carré » ; a^3 se lit « a au cube ».

Remarque : Attention à ne pas confondre $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$.

2) Produit de deux puissances d'un même nombre

Ex :

$2^3 \times 2^4 = 2\times2\times2 \times 2\times2\times2\times2 = 2^7$

$5^2 \times 5^1 = 5\times5 \times 5 = 5^3$

$3^6 \times 3^2 = 3\times3\times3\times3\times3\times3 \times 3\times3 = 3^8$

Règle de calcul : Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et a un nombre relatif.

$\boxed{a^n \times a^p = a^{n+p}}$ On somme les deux exposants.

Rq :

$8^3 \times 8^2 \times 8^4 = 8^{3+2+4} = 8^9$ Il y a en tout 9 facteurs 8.

$5^2 \times 4^3 = 5\times5 \times 4\times4\times4$ Ce ne sont pas les mêmes facteurs. On ne peut pas l'écrire sous forme d'une seule puissance.

$3^6 + 3^2 =$ C'est une somme. On ne peut pas l'écrire sous forme d'une seule puissance.

Conséquence : Puissance 0

$5^0 \times 5^4 = 5^{0+4} = 5^4$ et $1 \times 5^4 = 5^4$

Il faut donc que $5^0 = 1$.

Pour tout nombre relatif a, on a : $\boxed{a^0 = 1}$.

En particulier : $0^0 = 1$.

Conséquence : Puissance de puissance

$(2^3)^2 = (2^3) \times (2^3) = 2^{3+3} = 2^6$

$(7^6)^3 = (7^6) \times (7^6) \times (7^6) = 7^{6+6+6} = 7^{18}$

Pour tout nombre relatif a, on a : $\boxed{(a^n)^p = a^{n \times p}}$

3) Puissance d'exposant négatif

Ex : $2^3 \times \frac{1}{2^3} = 2\times2\times2 \times \frac{1}{2\times2\times2} = \frac{2\times2\times2}{2\times2\times2} = 1$

$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$ donc $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Définition : Soient n un entier et a un nombre relatif non nul.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Ex : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$ (L'inverse de a se note donc a^{-1}.)

4) Quotient de deux puissances d'un même nombre

Ex : $\frac{2^5}{2^2} = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2} = 2\times2\times2 = 2^3$ $\frac{3^4}{3^6} = \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3\times3} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

$\frac{4^3}{4^1} = \frac{4\times4\times4}{4} = 4^2$

Règle de calcul : Soient n et p deux entiers et a un nombre relatif non nul.

$$\boxed{\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}}$$

Ex : $\frac{5^8}{5^3} = 5^{8-3} = 5^5$ $\frac{7^{24}}{7} = 7^{24-1} = 7^{23}$

$\frac{11^3}{11^7} = 11^{3-7} = 11^{-4} = \frac{1}{11^4}$ $\frac{4^{-2}}{4^3} = \frac{1}{4^2} \times \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4^2\times4^3} = \frac{1}{4^5} = 4^{-5} = 4^{-2-3}$

5) Puissance d'un produit, d'un quotient

Ex : $(2\times3)^4 = 2\times3 \times 2\times3 \times 2\times3 \times 2\times3 = 2\times2\times2\times2 \times 3\times3\times3\times3 = 2^4 \times 3^4$

$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2\times2\times2}{5\times5\times5} = \frac{2^3}{5^3}$

Règle de calcul : Soient n un entier, a et b deux nombres non nuls.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ex : $4^3 \times 7^3 = (4\times7)^3 = 28^3$ $\frac{36^7}{3^7} = \left(\frac{36}{3}\right)^7 = 12^7$

II- PUISSANCE DE 10

Ex : $10^3 = 10\times10\times10 = 1\,000$ $\quad$ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Propriété : Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

$10^n = 10\times10\times\ldots\times10 = 100\ldots0$ (un chiffe 1 suivi de n chiffres 0)

$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{100\ldots0} = 0{,}00..01$ (n chiffre après la virgule)

Ex : $10^5 = 100\,000$ $\quad$ $10^{-4} = 0{,}000\,1$ $\quad$ $10^0 = 1$ $\quad$ $10^1 = 10$ $\quad$ $10^{-1} = 0{,}1$

Règles de calcul : Soient n et p deux entiers.

	Règle	Exemples
Produit	$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$	$10^3 \times 10^4 = 10^7$ $10^{-6} \times 10^4 = 10^{-2}$
Quotient	$\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$	$\frac{10^7}{10^3} = 10^4$ $\frac{10^{-5}}{10^8} = 10^{-13}$
Puissance de puissance	$(10^n)^p = 10^{n\times p}$	$(10^5)^2 = 10^{10}$ $(10^3)^{-4} = 10^{-12}$

Propriété : Soit n un entier positif.
Pour multiplier un nombre décimal par 10^n, on déplace la virgule de n rangs vers la droite.
Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-n}, on déplace la virgule de n rang vars la gauche.

Ex : $25{,}1 \times 10^5 = 2\,510\,000$
$25{,}1 \times 10^{-5} = 0{,}000\,251$

Ex : La distance entre le Soleil et la planète Mars est $2,29 \times 10^8$ km.
Celle entre le Soleil et la Terre est 150×10^6 km
La planète la plus proche du soleil est la Terre car $150 \times 10^6 = 150\,000\,000$ km
$2,29 \times 10^8 = 229\,000\,000$ km
Pour comparer facilement de tels nombres, on va les écrire sous une forme particulière : l'écriture scientifique.

III- ECRITURE SCIENTIFIQUE

Définition : L'écriture (ou notation) scientifique d'un nombre relatif est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$
où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule
et n est un entier relatif.

Ex : $A = 8,56 \times 10^7$ A est écrit en notation scientifique.
$B = 0,45 \times 10^{-2}$ B n'est pas écrit en notation scientifique car le chiffre avant la virgule est 0.
$C = 9,1 \times 5^3$ C n'est pas écrit en notation scientifique car le $2^{ième}$ facteur n'est pas une puissance de 10.

Ex : Ecrire en notation scientifique
$D = 732 = 7,32 \times 10^2$
$E = 0,043 = 4,3 \times 10^{-2}$
$F = 345\,756 = 3,457\,56 \times 10^5$
$G = 0,000\,673 = 6,73 \times 10^{-4}$
$H = 345 \times 10^3 = 3,45 \times 10^2 \times 10^3 = 3,45 \times 10^5$
$I = 0,067\,3 \times 10^4 = 6,73 \times 10^{-2} \times 10^4 = 6,73 \times 10^2$

Ex : Comparer.
a) $A = 6,04 \times 10^5$ et $B = 2,03 \times 10^7$ $A < B$ car $5 < 7$
b) $A = 9,1 \times 10^{-3}$ et $B = 8,4 \times 10^{-2}$ $A < B$ car $-3 < -2$
c) $A = 4,51 \times 10^7$ et $B = 6,7 \times 10^7$ $A < B$ car $7 = 7$ et $4,51 < 6,7$.
On compare d'abord les puissances, puis en cas d'égalité, on compare les nombres décimaux.

Ex : a) Effectuer à la calculatrice $623\,452 \times 786\,549$.
On obtient 4.903755471 E 11.
Cela signifie $4,903\,755\,71 \times 10^{11}$. Quand le nombre est trop grand, la calculatrice donne la valeur la plus précise possible en utilisant une notation scientifique.
b) Effectuer à la calculatrice 0,012 345 : 915 234.
On obtient 1.34883538 E -8.
Cela signifie $1,348\,835\,38 \times 10^{-8}$.

<u>Règles de calcul</u> : Soient n et p deux entiers.

	Règle	Exemples
Produit	$10^n \times 10^p = 10^{\cdots\cdots\cdots}$	$10^3 \times 10^4 =$ $10^{-6} \times 10^4 =$
Quotient	$\frac{10^n}{10^p} = 10^{\cdots\cdots\cdots}$	$\frac{10^7}{10^3} =$ $\frac{10^{-5}}{10^8} =$
Puissance de puissance	$(10^n)^p = 10^{\cdots\cdots\cdots}$	$(10^5)^2 =$ $(10^3)^{-4} =$

<u>Règles de calcul</u> : Soient n et p deux entiers.

	Règle	Exemples
Produit	$10^n \times 10^p = 10^{\cdots\cdots\cdots}$	$10^3 \times 10^4 =$ $10^{-6} \times 10^4 =$
Quotient	$\frac{10^n}{10^p} = 10^{\cdots\cdots\cdots}$	$\frac{10^7}{10^3} =$ $\frac{10^{-5}}{10^8} =$
Puissance de puissance	$(10^n)^p = 10^{\cdots\cdots\cdots}$	$(10^5)^2 =$ $(10^3)^{-4} =$