N° du candidat

L'emploi de la calculatrice est autorisé.
Le soin, la qualité de la présentation entrent pour 2 points dans l'appréciation des copies.
Les résultats seront soulignés.

La correction est disponible sur le site du Collège :
Espace Pédagogique puis rubrique Mathématiques.

Activités numériques

[13 Points]

EXERCICE 1

1. QCM.
   Pour chaque question, il y a au moins une réponse exacte.
   Cocher la réponse exacte sans justification.
   Une bonne réponse rapporte 0,75 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25.
   L'absence de réponse ne rapporte n'y n'enlève aucun point.
   Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

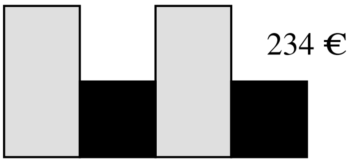
Questions	Réponses		
Quels sont les nombres premiers entre eux ?	● 63 et 44	○ 1 035 et 774	○ 774 et 338
Les diviseurs communs à 30 et 42 sont :	○ 1 ;2 ;3 ;5 ;6 et 7	● 1 ;2 ;3 et 6	○ 1 ;2 ;3 ;5 et 7
Le nombre de diviseurs communs à 40 et 60 est :	○ 4	● 6	○ 8
Le PGCD des nombres 12 et 30 est :	● 6	○ 2	○ 1

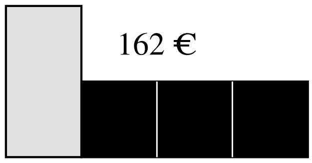
2. Vrai/Faux :

Questions	Réponses	Justifications par un exemple si réponse fausse
La somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.	■ V □ F	
Si 2 et 3 sont deux diviseurs d'un nombre entier, leur somme 5 est un diviseur de ce nombre.	□ V ■ F	2 est un diviseur de 4. 3 est un diviseur de 15. 5 n'est pas un diviseur de 19.

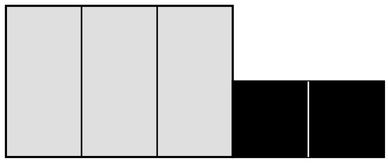
EXERCICE 2

Deux combinaisons de meubles sont exposées en magasin, la première au prix de 234 euros et la deuxième au prix de 162 euros.





Quel est le prix de la composition ci-contre ? Expliquer la démarche suivie.



Correction:

Soient x le prix d'un meuble haut et y le prix d'un meuble bas, en euros.

$$\begin{cases} 2x & +2y & = 234 \\ x & +3y & = 162 \end{cases}$$

Dans la deuxième équation, on a $x = 162 - 3y$

On remplace x dans la première équation :

$$\begin{aligned} 2 \times (162 - 3y) + 2y &= 234 \\ 324 - 6y + 2y &= 234 \\ -4y &= -90 \\ y &= 22,5 \end{aligned}$$

Puis $x = 162 - 3 \times 22,5 = 162 - 67,5 = 94,5$

Un meuble haut coûte $94,50$ € et un meuble bas coûte $22,50$ €.

Prix de la dernière combinaison :

$3 \times 94,5 + 2 \times 22,5 = 283,5 + 45 = 328,5$

La dernière combinaison coûte $328,50$ €.

EXERCICE 3

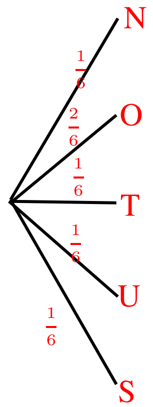
On écrit sur les faces d'un dé équilibré à six faces, chacune des lettres du mot :

N O T O U S

On lance le dé et on regarde la lettre inscrite sur la face supérieure.

1. Quelles sont les issues de cette expérience ?

Correction:



Il y a 5 issues :N, O, T, U, S.

2. Déterminer la probabilité de chacun des événements :

(a) E_1 : « On obtient la lettre O ».

Correction:

$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(b) Soit E_2 l'événement contraire de E_1. Décrire E_2 et calculer sa probabilité.

Correction:

E_2=« On obtient N, T, U ou S » ou « on n'obtient pas le O ».

$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(c) E_3 : « On obtient une consonne ».

Correction:

$p(E_3) = p(\text{« N »}) + p(\text{« T »}) + p(\text{« S »}) = \frac{1}{6} \times 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(d) E_4 : « On obtient une lettre du mot K I W I ».

Correction:

$P(E_4) = 0$ (événement impossible)

(e) E_5 : « On obtient une lettre du mot C A G O U S ».

Correction:

$P(E_5) = p(\text{« O »}) + p(\text{« U »}) + p(\text{« S »}) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Activités géométriques
[12 Points]

EXERCICE 1

À l'intérieur de la maison, un menuisier étudie une plaque de bois dessinée ci-contre :
La figure n'est pas aux bonnes dimensions.

Le menuisier a tracé la perpendiculaire à [EC] passant par A, il a nommé D le point d'intersection de cette perpendiculaire avec [EC].
Il a également tracé [AC].
Il a mesuré AB = 115 cm, BC = 80 cm, DC = 100 cm, ED = 20 cm, AC = 140 cm et AF = 28 cm.

1. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.

Correction:
D'une part :
$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= 115^2 + 80^2 \\ &= 19\,625 \end{aligned}$$
D'autre par :
$$\begin{aligned} AC^2 &= 140^2 \\ &= 19\,600. \end{aligned}$$
Donc : $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$
D'après la contraposée du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle.

2. Les droites (AD) et (FE) sont-elles parallèles ? Justifier.

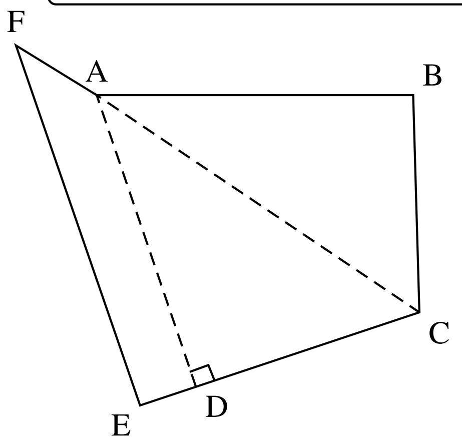
Correction:
$\dfrac{CA}{CF} = \dfrac{140}{140+28} = \dfrac{140}{168} = \dfrac{5}{6}$
$\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{100}{120} = \dfrac{5}{6}$
Donc $\dfrac{CA}{CF} = \dfrac{CD}{CE}$
Les points C,A,F et C,D,E sont alignés dans le même ordre.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, (AD) et (FE) sont parallèles.

3. Calculer AD, donner la valeur arrondie à l'unité près.

Correction:
Dans le triangle ADC, rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore.
$AC^2 = AD^2 + DC^2$
$140^2 = AD^2 + 100^2$
Donc $AD^2 = 19\,600 - 10\,000 = 9\,600$
Et donc $AD = \sqrt{9\,600} \approx 98$ cm

4. En déduire FE, donner la valeur arrondie à l'unité près.

Correction:
C,A et F sont alignés.
C,D et E sont alignés.
(AD)//(FE).
D'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{CA}{CF} = \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AD}{FE}$
D'où $\dfrac{100}{120} = \dfrac{98}{FE}$
Et donc $FE = \dfrac{120 \times 98}{100} \approx 118$ cm

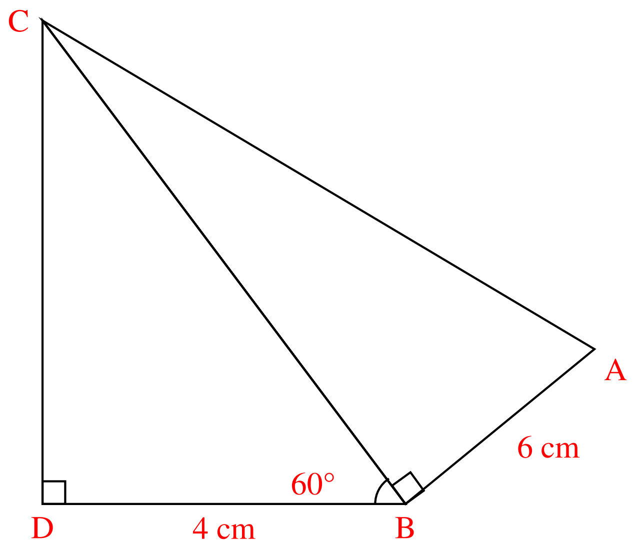


EXERCICE 2

On donne BD = 4 cm ; BA = 6 cm et $\widehat{DBC} = 60°$.

1. Construire la figure en vraie grandeur.

Correction:



2. Montrer que BC = 8 cm.

Correction:
Dans le triangle DBC rectangle en D :
$\cos\widehat{DBC} = \dfrac{DB}{CB}$
Donc $\cos 60° = \dfrac{4}{CB}$
D'où $CB = \dfrac{4}{\cos 60°} = 8$ cm

3. Calculer CD. Donner la valeur arrondie au dixième.

Correction:
De même :$\sin\widehat{DBC} = \dfrac{DC}{CB}$
Donc $\sin 60° = \dfrac{DC}{8}$
D'où :

$$\begin{aligned} DC &= 8 \times \sin 60° \\ &= 4\sqrt{3} \\ &\approx 6,9 \text{ cm} \end{aligned}$$

4. Calculer AC.

Correction:
Dans le triangle ABC, rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + BA^2 \\ &= 8^2 + 6^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Donc $AC = \sqrt{100} = 10$ cm

5. Quelle est la valeur de $\tan\widehat{BAC}$?

Correction:
$\tan\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

6. En déduire la valeur arrondie au degré de $\widehat{BAC}$.

Correction:
$\widehat{BAC} = \arctan\left(\dfrac{4}{3}\right) \approx 53°$

Problème

[13 Points]

Le directeur d'un théâtre sait qu'il reçoit environ 500 spectateurs quand le prix d'une place est de 20 €. Il a constaté que chaque réduction de 1 euro du prix d'une place attire 50 spectateurs de plus.

Toutes les parties sont indépendantes.

Partie 1

1. Compléter le tableau 1 de l'Annexe 1.
2. On appelle x le montant de la réduction (en €). Compléter le tableau 2 de l'annexe 1.
3. Développer l'expression de la recette obtenue à la question 2.

Correction:

$$\begin{aligned}(20-x)(500+50x) &= 10\,000 + 1\,000x - 500x - 50x^2 \\ &= -50x^2 + 500x + 10\,000\end{aligned}$$

Partie 2

Le directeur de la salle souhaite déterminer le prix d'une place lui assurant la meilleure recette. Il utilise la fonction R donnant la recette (en €) en fonction du montant x de la réduction (en €).

Sa courbe représentative est donnée en annexe 2.

Par lecture graphique, répondre aux questions ci-dessous (on attend des valeurs approchées avec la précision permise par le graphique et on fera apparaître sur le graphique les tracés nécessaires à la lecture) :

1. Quelle est la recette pour une réduction de 2 € ?

Correction:
Pour une réduction de 2 €, la recette est d'environ 10 750€

2. Quel est le montant de la réduction pour une recette de $4\,050$ € ? Quel est alors le prix d'une place ?

Correction:
Pour une recette de 4 050€, la réduction est de 17 € environ.
La place vaut alors 3€.

3. Quelle est l'image de 8 par la fonction R ? Interpréter ce résultat pour le problème.

Correction:
R(8) $\approx$ 10 750
S'il consent une réduction de 8€, il fait une recette de 10 750€ environ.

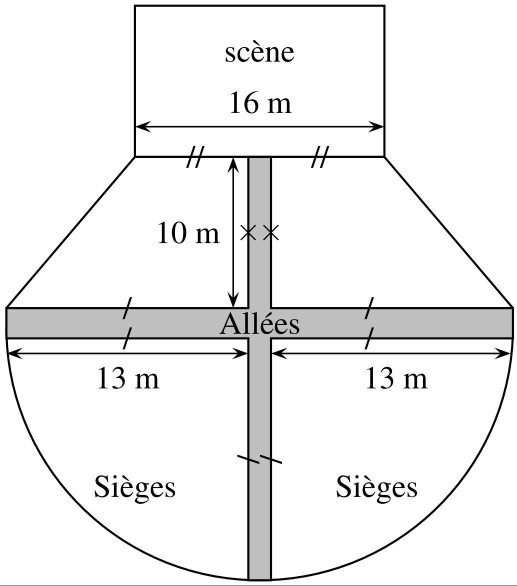
4. Quelle est la recette maximale ? Quel est alors le prix de la place ?

Correction:
La recette maximale est (à peu près) de 11 250€.
La recette est maximale pour une réduction de 5€.
La place vaut alors 15€.

Partie 3

<u>Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.</u>

La salle de spectacle a la forme ci-contre :
Les sièges sont disposés dans quatre zones : deux quarts de disques et deux trapèzes, séparées par des allées ayant une largeur de 2 m.
On peut placer en moyenne 1,8 sièges par m^2 dans la zone des sièges.
Calculer le nombre de places disponibles dans ce théâtre. Formulaire disponible en annexe 3.



Correction:

- la petite base des trapèzes mesure 7m.
  $\dfrac{(16-2)}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$
- Un trapèze a une aire de 100 m^2
  $\dfrac{(\text{b+B}) \times \text{h}}{2} = \dfrac{(7+13) \times 10}{2} = 100$
  Donc pour un trapèze, on peut installer 180 sièges.
  Pour les deux trapèzes, on peut donc installer 360 sièges.
- Un quart de cercle a une aire de 132,7 m^2.
  $\dfrac{\pi R^2}{4} = \dfrac{\pi \times 13^2}{2} \approx 132,73$
  Pour un quart de cercle, on peut donc installer 238 sièges.
  Pour les deux quarts de cercle, on peut donc installer 476 sièges.
  Donc au total, on peut installer 836 sièges.

N° du candidat

DOCUMENT RÉPONSE À RENDRE AVEC VOTRE COPIE

ANNEXE 1

Tableau 1

Réduction en €	Prix de la place en €	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
0	20	500	$20 \times 500 = 10\,000$
1	19	550	$19 \times 550 = 10\,450$
2	18	600	$18 \times 600 = 10\,800$
4	16	700	$16 \times 700 = 11\,200$

Tableau 2

Réduction en €	Prix de la place en €	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
x	$20 - x$	$500 + 50x$	$(20 - x) \times (500 + 50x)$

ANNEXE 2