Exercice 1 : Développement, équation produit, programme de calcul

Eric dit à Zoé : « choisis un nombre, calcule son triple et ajouté 1 au résultat, calcule alors le carré du nombre obtenu et soustrais-lui le nombre 4 ».

1. Quel résultat trouvera Zoé si elle choisit -5 ?

Zoé trouvera : $(3\times(-5) + 1)^2 - 4 = 192$

2. Eric propose alors trois expressions dont l'une correspond au calcul qu'il doit faire.
   Voici les 3 expressions :

$$A = 4 - (3x + 1)^2 \qquad B = (3x +1)^2 - 4 \qquad C = (x +3)^2 - 4$$

Quelle expression Zoé doit-elle choisir ? (aucune justification n'est demandée)

Elle doit choisir l'expression B

3. On considère l'expression $E = (3x -1)(3x + 3)$.
   a) Résoudre l'équation $(3x -1) (3x + 3) = 0$

Un produit est nul si l'un des facteurs est nul

On a : $3x - 1 = 0$ ou $3x + 3 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$

   b) Montrer que E est égale à l'expression choisie à la question 2.

$E = (3x -1)(3x + 3) = 9x^2 + 9x - 3x - 3 = 9x^2 + 6x - 3$

$(3x +1)^2 - 4 = 9x^2 - 6x + 1 - 4 = 9x^2 - 6x - 3$

Les deux expressions sont donc égales

4. Zoé rejoue, elle choisit un nombre entier et trouve alors 0. Quel(s) nombre(s) a-t-elle choisie ?

Zoé a choisi -1 (voir questions 3 a) et b))

Exercice 2 :

1. Décomposer 102 et 85 en produit de facteurs premiers.

$102 = 2\times3\times17 \qquad 85 = 5\times17$

2. Donner 3 diviseurs de 102.

Les diviseurs de 102 sont : 1 ;2 ;3 ;17 ;6 ;34 ;51 ;102

3. Un libraire dispose d'une feuille cartonnée de 85 cm et 102 cm.
   Il souhaite découper dans celle-ci, en utilisant toute la feuille, des étiquettes carrées.
   Les côtés de ces étiquettes ont tous la même mesure et un côté mesure un nombre entier de cm.
   a. Les étiquettes peuvent-elles avoir 34 cm de côté ? Justifier.

Le côté des étiquettes doivent diviser 85 et 102 (c'est la condition pour qu'on utilise toute la feuille)

$34 = 2\times17$ divise 102 mais pas 85 donc il ne peut pas

   b. Combien doit mesure les côtés des étiquettes ? Combien d'étiquettes pourra-t-il découper dans ce cas ?

le seul diviseur commun à 102 et 85 (autre que 1) est 17 :

donc l'étiquette doit avoir un côté de longueur 17 cm

sur 85 cm : on en découpe 5 sur 102 cm : on en découpe 6

En tout, on pourra découper : $5\times6 = 30$ étiquettes

Exercice 3 :

1. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier

Affirmation 1 : La décomposition en produit de facteurs premiers de 360 est $2\times5\times6^2$

Faux 6 n'est pas un nombre premier

$360 = 2\times2\times2\times3\times3\times5$

Affirmation 2 : 2^{40} est le double de 2^{39}

Vrai : $2\times2^{39} = 2^{40}$

Affirmation 3 : Pour tous les nombres x, on a : $(2x -3)^2 = 4x(x - 3) + 9$

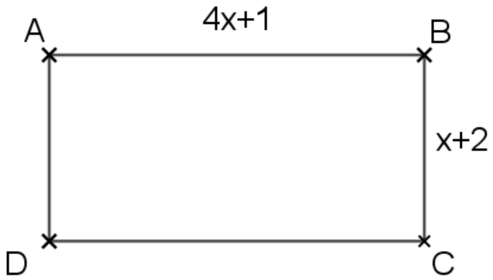
$(2x -3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 \qquad 4x(x -3) + 9 = 4x^2 - 12x + 9$ vrai

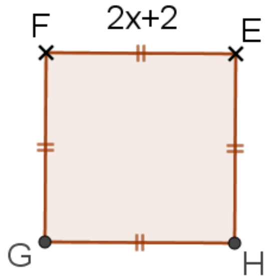
2. $\frac{2}{3} - \frac{35}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{2}{3} - \frac{7\times5\times2\times2}{3\times3\times7} = \frac{2}{3} - \frac{20}{9} = \frac{6}{9} - \frac{20}{9} = -\frac{14}{9}$

Correction Exercice 4 :

On considère les figures suivantes :

- x désigne un nombre positif.
- ABCD est un rectangle tel que AB = $4x + 1$ et BC = $x + 2$
- FEHG est un carré dont le côté mesure $2x + 2$ cm.





Première partie : les aires

1) Montrer que l'aire du rectangle ABCD peut s'écrire $4x^2 + 9x + 2$

Aire ABCD = AB×BC = $(4x + 1) \times (x + 2) = 4x^2 + 8x + x + 2 = 4x^2 + 9x + 2$

2) Montrer que l'aire du carré peut s'écrire sous la forme $4x^2 + 8x + 4$.

Aire du carré FEHG = $FE^2 = (2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4$

3) Raphaël souhaite comparer les aires de ces deux figures. Pour cela, il a utlisé une feuille de tableur dont voici une copie :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	0	1	2	3	4	5	6	7
2	4x²+8x+4	4	16	36	64	100	144	196	256
3	4x²+9x+2	2	15	36	65	102	147	200	261
4									

a) Quelle formule a-t-il tapé en B2 afin de pouvoir l'étirer sur la ligne 2 ?

Il a tapé la formule : = 4*B^2 + 8*B1 + 4

b) Quelle formule a-t-il tapé en B3 afin de pouvoir l'étirer sur la ligne 3 ?

Il a tapé la formule : = 4*B1^2+9*B1 + 2

c) A l'aide du tableau, pour quelle(s) valeur(s) de x les deux figures ont-elles la même aire ?

Les deux aires sont les mêmes pour $x = 2$ (colonne D, on voit que les deux aires sont de 36 cm²)

Deuxième Partie : les périmètres

Nathanaël, lui, a voulu étudier les figures par rapport à leur périmètre.

1) Exprime le périmètre du rectangle ABCD en fonction de x.

Périmètre du rectangle ABCD = 2× (AB + BC) = $2\times(4x + 1 + x + 2) = 2\times(5x + 3) = 10x + 6$

2) Exprime le périmètre du carré FEHG en fonction de x.

Périmètre du carré FEHG = 4×FE = $4\times(2x + 2) = 8x + 8$

3) Pour quelle valeur de x les deux figures ont-elles le même périmètre ?

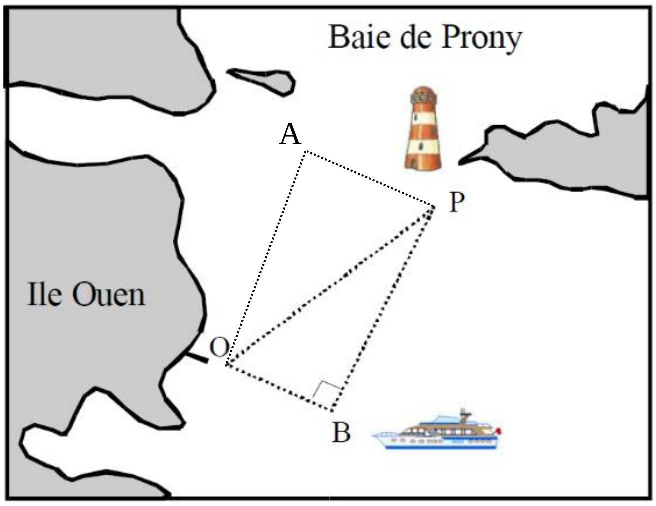
Pour que les deux figures aient la même aire, on doit avoir : $10x + 6 = 8x + 8$

$10x - 8x = 8 - 6$

$2x = 2 \quad x = \frac{2}{2} = 1$ cm

Exercice 5 (12 points) :

La distance entre le phare P du cap N'Doua et ponton O de la tribu de Ouara est à égale à environ 4,65 km.
La bouée Aval située en A se trouve à 2,79 km du phare et à 3,72 km du ponton.
Un bateau B se trouve au large de ce ponton.



Cette figure est donnée à titre indicatif et n'est pas en vraie grandeur.

1) Le triangle OPA est-il rectangle ?

Dans le triangle AOP le plus grand côté est [OP]
$OP^2 = 4,65^2 = 21,6225$
$AO^2 + AP^2 = 2,79^2 + 3,72^2 = 21,6225$
$OP^2 = AO^2 + AP^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AOP est rectangle en A.

Le triangle OPB est rectangle en B et des visées ont permis d'établir que l'angle $\widehat{OPB}$ mesure 30°.

2) Montrer que la distance séparant le bateau B du ponton O est égale à 2 325 m.

OP = 4,65 km = 4 650 m
Dans le triangle OBP rectangle en B, on a :

$\sin \widehat{OPB} = \dfrac{OB}{OP}$

$\sin 30° = \dfrac{OB}{4\,650}$ $\qquad$ $OB = \sin 30° \times 4\,650 = 2\,325$ m

3) Sachant que la bateau B se déplace à 15,5 km/h, déterminer le temps (en minutes) qu'il lui faudra pour rejoindre le ponton O.

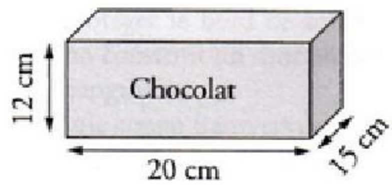
15,5 km = 15 500 m 1h = 60 minutes : le bateau parcourt 15 500 m en 60 minutes

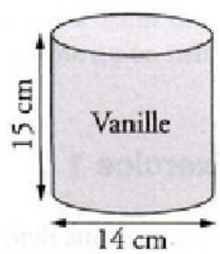
Distance en m	15 500	2 325
Temps en minutes	60	$\dfrac{60\times 2\,325}{15\,500} = 9$

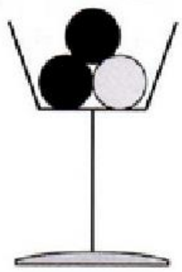
Il faudra 9 minutes au bateau pour rejoindre le ponton O

Exercice 6 : calculs de volumes + proportionnalité

Un restaurant propose en dessert des coupes de glace composées de trois boules supposées parfaitement sphériques, de diamètre 4,2 cm. Le pot de glace au chocolat ayant une forme d'un parallélépipède rectangle, est plein, ainsi que le pot de glace cylindrique à la vanille.
Le restaurateur veut constituer des coupes avec deu*x* boules au chocolat et une boule à la vanille.







Rappels : Volume cylindre = aire de la base × hauteur $\qquad$ Volume boule = $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

1. a. Montrer que le volume d'un pot de glace au chocolat est de 3 600 cm^3.
Volume pot de glace en chocolat = $20\times15\times12 = 3\,600$ cm^3
b. Calculer la valeur arrondi au cm^3 du volume d'un pot de vanille.
Le diamètre de la base est de 14 cm donc le rayon mesure 7 cm
Volume du pot de vanille = $\pi \times 7^2 \times 15 = 735\pi \sim 2\,309$ cm^3
2. Calculer la valeur arrondie au cm^3 du volume d'une boule contenu dans la coupe.
Le diamètre d'une boule est de 4,2 cm donc son rayon est de 2,1 cm
Volume d'une boule de glace = $\dfrac{4}{3} \times \pi \times 2,1^3 \sim 39$ cm^3
3. Sachant que le restaurateur doit faire 100 coupes de glace, combien doit-il acheter de pots au chocolats et de pots à la vanille ?

Dans chaque coupe, il y a :
- Deu*x* boules au chocolats ce qui représente un volume de $2\times39 = 78$ cm^3
- Une boule à la vanille ce qui représente un volume d'environ 39 cm^3

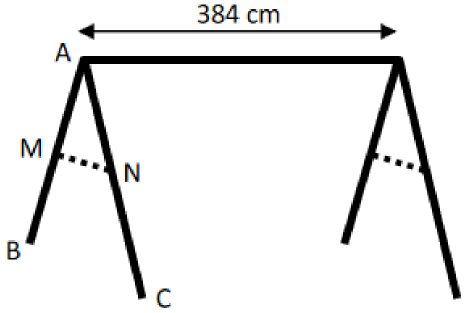
Pour 100 coupes, il faut :
- $78\times100 = 7\,800$ cm^3 de chocolat soit $7\,800 \div 3\,600 \sim 2,17$ soit 3 pots de glaces au chocolat
- $39 \times 100 = 3\,900$ cm^3 de glace à la vanille soit $3\,900 \div 2\,309 \sim 1,7$ soit 2 pot de glaces à la vanille

Correction Exercice 7 : Pythagore, périmètre + proportionnalité ; % ; trigo(calcul angle)

Une entreprise fabrique des portiques pour installer des balançoires sur des aires de jeux.

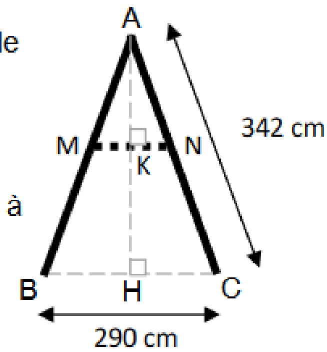
Document 1. Croquis d'un portique

Vue d'ensemble



Vue de côté

ABC est un triangle isocèle en A.
H est le milieu de [BC].
(MN) est parallèle à (BC).



: poutres en bois de diamètre 100 mm.

: barres de maintien latérales en bois.

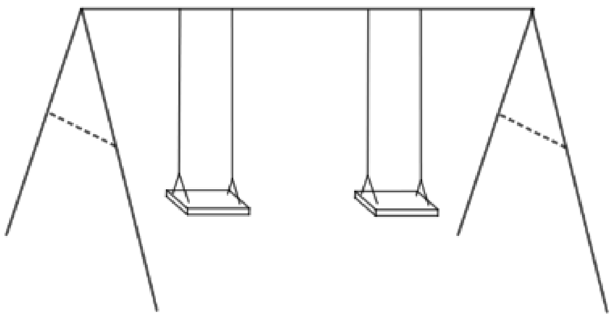
Document 2. Coût du matériel

Poutres en bois de diamètre 100 mm :

- Longueur 4 m : 12,99 € l'unité ;
- Longueur 3,5 m : 11,75 € l'unité ;
- Longueur 3 m : 10,25 € l'unité.

Barres de maintien latérales en bois :

- Longueur 3 m : 6,99 € l'unité ;
- Longueur 2 m : 4,75 € l'unité ;



Ensemble des fixations nécessaires pour un portique : 80 €.

Ensemble de deux balançoires pour un portique : 50 €.

1) Déterminer la longueur AH du portique, arrondie au cm près.

H est le milieu de [BC] donc HC = $\frac{BC}{2} = \frac{290}{2}$ = 145 cm

Dans le triangle AHB rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AB^2 = AH^2 + HB^2$
$AH^2 = 342^2 - 145^2$
$AH^2 = 95\ 939$
$AH = \sqrt{95\ 939} \sim 310$ cm

2) Les barres de maintien doivent être fixées à 165 cm du sommet (AN = 165 cm).

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles donc on a : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$

a) Justifier pourquoi les triangles AMN et ABC sont des triangles semblables

Les triangles AMN et ABC ont deux angles de même mesure ($\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$ c'est le même angle !) donc les triangles AMN et ABC sont semblables

b) Calculer MN (arrondir le résultat au cm près).

Les triangles AMN et ABC sont semblables donc leurs côtés sont proportionnels :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ soit $\frac{AM}{AB} = \frac{165}{342} = \frac{MN}{290}$ MN = $\frac{290 \times 165}{342} \sim 140$ cm

3) Montrer que le coût minimal pour un tel portique équipé de balançoire s'élève à 196,98€.

<u>Poutres en bois nécessaire :</u>

Il faut 4 poutres de bois de longueur 3,5 m (pour les « pieds » représentées par [AB] et [AC]) + 1 barre de 4 m pour relier les deux pieds

Coût des poutres en bois : $4 \times 11{,}75 + 12{,}99 = 59{,}99$ €

<u>Barres en acier nécessaire : représenté par [MN]</u>

Il faut une poutre de 3 m que l'on coupera en deux ce qui représente un coût de : 6,99 €

Coût minimal pour ce portique :

Barres en acier + poutres en bois + ensemble de fixation + les deux balançoires

$59{,}99 + 6{,}99 + 80 + 50 = 196{,}98$ €

4) L'entreprise veut vendre ce portique équipé de 20% plus cher que son coût minimal. Déterminer ce prix de vente arrondi au centime près.

Prix initial	100	196,98
augmentation	20	$\frac{196{,}98 \times 20}{100} = 39{,}396$

Le prix de vente sera donc de :

$196{,}98 + 39{,}396 = 236{,}376$ soit 236,38 €

5) Pour des raisons de sécurité, l'angle $\widehat{BAC}$ doit être compris entre 45° et 55°.
Ce portique respecte-t-il cette condition ?

Dans le triangle HAC rectangle en H, on a :

$\sin \widehat{HAC} = \frac{HC}{AC}$ $\sin \widehat{HAC} = \frac{145}{342}$ $\widehat{HAC} \sim 25°$

le triangle ABC est isocèle donc [AH] est une hauteur mais aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$

$\widehat{BAC} = 2 \times \widehat{HAC}$ soit environ 50° , donc le portique respecte bien la condition de sécurité.