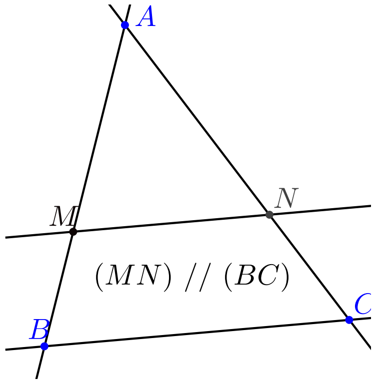
Le théorème des trois rapports égaux

I Proportionnalité

ABC et AMN sont deux triangles formés par deux parallèles (MN) et (BC) qui coupent deux sécantes (AB) et AC.
Dans ce cas, le tableau suivant est un **tableau de proportionnalité :**



Longueurs des côtés de AMN	AM	AN	MN
Longueurs des côtés correspondants de ABC	AB	AC	BC

Autrement dit, pour passer de la longueur AM à AB ou de AN à AC ou de MN à BC, il faut mutiplier par un **même nombre***.*
Ce nombre est appelé le **coefficient de proportionnalité***.*

Propriété :

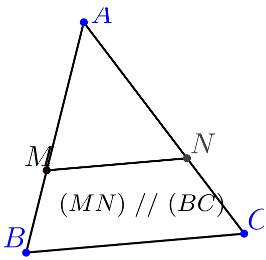
Dans un triangle ABC, si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors les longueurs des côtés de AMN sont **proportionnelles** aux longueurs des côtés correspondants de ABC.

II Égalité de trois rapports

Théorème (*des trois rapports égaux*) :

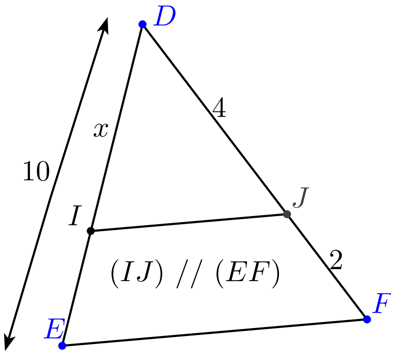
Dans un triangle ABC, si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{triangle } AMN \\ \leftarrow \text{triangle } ABC \end{array}$$



W.Laidet

III Exemple



Dans la figure ci-contre, on donne :

➩ $DE = 10$
➩ J un point de $[DF]$ tel que $DJ = 4$ et $JF = 2$
➩ I est un point de $[DE]$ tel que (IJ) // (EF)

On pose $DI = x$.

Calculer x.

Les données : Dans le triangle DEF,
➩ $I \in [DE]$
➩ $J \in [DF]$
➩ (IJ) // (EF)

La propriété : D'après le **Théorème des trois rapports égaux** :

La conclusion :

$$\frac{DI}{DE} = \frac{DJ}{DF} = \frac{IJ}{EF}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{4}{4+2} = \frac{IJ}{EF}$$

On remplace les lettres par les valeurs connues

$$\frac{x}{10} = \frac{4}{6}$$

$$x \times 6 = 10 \times 4$$

On effectue **le produit en croix**

$$6x = 40$$

On résout l'équation

$$x = \frac{40}{6}$$

$$\boxed{x = \frac{20}{3}}$$

$x \approx 6,667$

Donc $\boxed{x = \frac{20}{3}}$.

W.Laidet