Activités numériques

[12 Points]

EXERCICE 1

On considère les trois nombres A, B et C :

$A = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{7}{9}$; $B = \frac{1}{35} : \frac{12}{7} + \frac{1}{15}$; $C = \frac{135 \times 10^{14}}{5 \times 10^{-6}}$

1. Calculer A et B et donner le résultat sous la forme de fraction irréductible.

$A = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{7}{9}$
$A = \frac{5}{6} + \frac{5 \times 7}{6 \times 9}$
$A = \frac{5}{6} + \frac{35}{54}$
$A = \frac{5 \times 9}{6 \times 9} + \frac{35}{54}$
$A = \frac{45}{54} + \frac{35}{54}$
$A = \frac{45 + 35}{54}$
$A = \frac{80}{54}$
$A = \frac{40 \times 2}{27 \times 2}$
$A = \frac{40 \times \cancel{2}}{27 \times \cancel{2}}$
$A = \frac{40}{27}$

$B = \frac{1}{35} : \frac{12}{7} + \frac{1}{15}$
$B = \frac{1}{35} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{15}$
$B = \frac{1}{\cancel{35}_5} \times \frac{\cancel{7}^1}{12} + \frac{1}{15}$
$B = \frac{1}{5 \times 12} + \frac{1}{15}$
$B = \frac{1}{60} + \frac{1}{15}$
$B = \frac{1}{60} + \frac{4}{60}$
$B = \frac{5}{60}$
$B = \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{60}_{12}}$
$B = \frac{1}{12}$

2. Calculer C et donner l'écriture scientifique.

$C = \frac{135 \times 10^{14}}{5 \times 10^{-6}}$
$C = \frac{135}{5} \times \frac{10^{14}}{10^{-6}}$
$C = 27 \times 10^{20}$
$C = 2,7 \times 10 \times 10^{20}$
$C = 2,7 \times 10^{21}$

EXERCICE 2

On considère l'expression $E = (3x + 2)^2 - (3x + 2)(x + 7)$.

1. Développer et réduire E.

$E = (3x + 2)^2 - (3x + 2)(x + 7)$
$E = 9x^2 + 12x + 4 - (3x^2 + 21x + 2x + 14)$
$E = 9x^2 + 12x + 4 - 3x^2 - 23x - 14$
$E = 6x^2 - 11x - 10$

2. Factoriser E.

$E = (3x + 2)^2 - (3x + 2)(x + 7)$
$E = \underline{(3x + 2)}(3x + 2) - \underline{(3x + 2)}(x + 7)$
$E = \overline{(3x + 2)}\,\overline{[(3x + 2) - (x + 7)]}$
$E = (3x + 2)(3x + 2 - x - 7)$
$E = (3x + 2)(2x - 5)$

3. Calculer E lorsque $x = \frac{1}{2}$.
   $E = 6x^2 - 11x - 10$
   $E = 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 11 \times \frac{1}{2} - 10$
   $E = 6 \times \frac{1}{4} - \frac{11}{2} - 10$
   $E = \frac{6}{4} - 5,5 - 10$
   $E = 1,5 - 15,5$
   $E = -14$
4. Résoudre l'équation $(3x + 2)(2x - 5) = 0$.

Proprit

Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

Soit $3x + 2 = 0$
$3x = -2$
$x = -\frac{2}{3}$

Soit $2x - 5 = 0$
$2x = 5$
$x = \frac{5}{2}$
$x = 2,5$

Les solutions de l'équation sont :$-\frac{2}{3}$ et 2,5.

EXERCICE 3

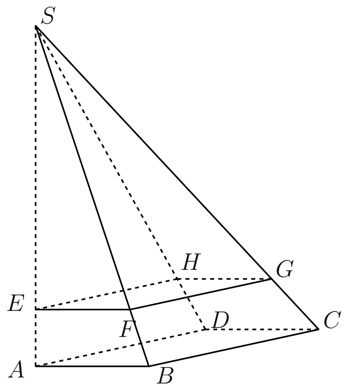
1. Un confiseur reçoit une commande de caramels d'un montant de 120,40 euros. Pour fidéliser son client, il décide d'accorder une remise de 20 %.
   Calculer le montant de la facture après remise.
   $120,40 \times (1 - 0,2) = 120,40 \times 0,8 = 96,32$ €.
2. Quelques jours plus tard, le confiseur répartit 301 caramels et 172 chocolats dans des sachets identiques, sachant qu'on utilise tous les caramels et tous les chocolats.
   (a) Calculer le nombre maximal de sachets réalisables.
   Il faut prendre le pgcd de 301 et 172.
   pgcd(301 ;172)=43
   (b) Calculer le nombre de caramels et le nombre de chocolats contenus dans un sachet.
   $301 \div 43 = 7$
   $172 \div 43 = 4$
   Dans un sachet, il y aura 7 caramels et 4 chocolats.
   Pensez à remercier vos enseignants de Mathématiques, pour cette correction de Brevet, en utilisant l'exercice 3...

Activités géométriques

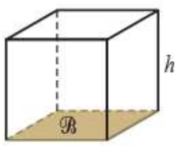
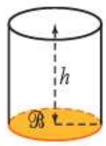
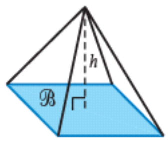
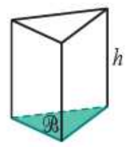
[12 Points]

EXERCICE 1

$SABCD$ est une pyramide à base rectangulaire $ABCD$, de hauteur $[SA]$.
On donne $SA = 15$ cm, $AB = 8$ cm et $BC = 11$ cm.



1. Calculer le volume V_1 de la pyramide $SABCD$.
   On pourra utiliser le formulaire suivant :

Figure :				
Volume :	h^3	$\pi \times r^2 \times h$	$\dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}$	$\mathscr{B} \times h$

   Il faut utiliser la troisième formule :
   $V_1 = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3} = \dfrac{AB \times BC \times SA}{3} = \dfrac{8 \times 11 \times 15}{3} = 440 \text{ cm}^3$

2. Démontrer que $SB = 17$ cm.
   Le triangle SAB est rectangle en A.
   D'après le théorème de Pythagore :
   $SB^2 = AS^2 + AB^2$
   $SB^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$
   $SB = \sqrt{289} = 17$ cm

3. On note E le point de $[SA]$ tel que $SE = 12$ cm et F le point de $[SB]$ tel que $SF = 13,6$ cm.
   Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
   Dans le triangle SAB :
   $E \in [SA]$ et $F \in [SB]$.
   D'une part : $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{12}{15}$.
   D'autre part : $\dfrac{SF}{SB} = \dfrac{13,6}{17}$.
   $\dfrac{12}{15} \stackrel{?}{=} \dfrac{13,6}{17}$.
   $12 \times 17 = 204$.
   $15 \times 13,6 = 204$.
   Donc $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SE}{SA}$.
   De plus, les points S, E, A et S, F, B sont alignés dans le même ordre.
   Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

4. On coupe cette pyramide par le plan passant par E et parallèle à la base de la pyramide. La pyramide $SEFGH$ ainsi obtenue, est une réduction de la pyramide $SABCD$.
   (a) Quel est le coefficient de la réduction ?
   $\dfrac{SA}{SE} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} = 0,8.$
   Donc la réduction est de coefficient 0,8.
   (b) En déduire le volume V_2 de la pyramide $SEFGH$ en fonction de V_1 et le calculer.

> **Proprit**
> Lorsqu'une figure est obtenue à partir d'une autre par une réduction de coefficient k, alors les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3.

   Donc $V_2 = V_1 \times 0,8^3 = 440 \times 0,512 = 225,28$ cm^3

EXERCICE 2

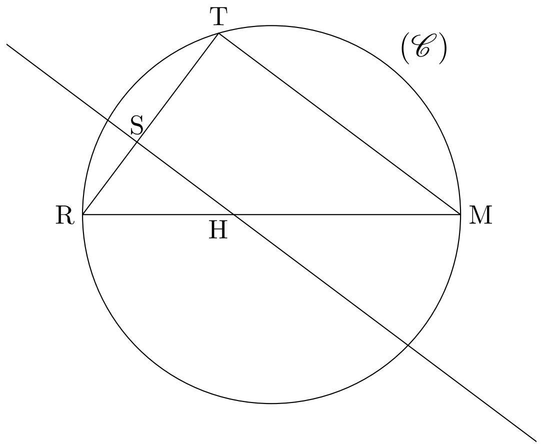
L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que $AB = 9$; $AC = 15$; $BC = 12$.

1. (a) Démontrer que ABC est rectangle en B.
   D'une part :$AC^2 = 15^2 = 225.$
   D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225.$
   Donc :$AB^2 + BC^2 = AC^2$.
   Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.
   (b) Tracer en vraie grandeur le triangle ABC sur la copie.
2. E est le point du segment $[AB]$ tel que $AE = 3$.
   F est le point du segment $[BC]$ tel que (EF) et (AC) sont parallèles.
   (a) Placer les points E et F sur la copie.
   (b) Calculer BF.
   Dans le triangle ABC :
   $E \in [AB]$
   $F \in [BC]$
   $(EF)//(AC)$
   Donc d'après le théorème de Thalès, on a :
   $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{EF}{AC}.$
   $\dfrac{6}{9} = \dfrac{BF}{12} = \dfrac{\cancel{EF}}{\cancel{15}}.$
   Donc $BF \times 9 = 12 \times 6$
   $BF = \dfrac{72}{9} = 8$ cm.
3. Calculer l'aire du triangle AEF.
   Conseil :Tracer [AF], et prendre comme base :[AE] et comme hauteur :[BF]
   $\mathscr{A} = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{3 \times 8}{2} = 12$ cm^2

Problème

[12 Points]

L'unité de longueur est le cm, la figure est réalisée à l'échelle $\frac{1}{2}$. Ne pas reproduire la figure.



Partie A

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre $[RM]$ avec $RM = 10$. Soit T un point de $(\mathscr{C})$ tel que $RT = 6$.

1. Démontrer que RMT est un triangle rectangle.

   Proprit

   Si un triangle est inscrit dans un cercle, et si de plus l'un des côtés du cercle est un diamètre alors ce triangle est rectangle.

   R, M et T sont sur le cercle $(\mathscr{C})$.
   $[RM]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$.
   Donc RMT est rectangle en T.

2. Démontrer que $TM = 8$.
   Dans le triangle RMT, rectangle en T. D'après le théorème de Pythagore :
   $RM^2 = RT^2 + TM^2$
   $10^2 = 6^2 + TM^2$
   $100 = 36 + TM^2$
   $TM^2 = 100 - 36 = 64$
   $TM = \sqrt{64} = 8$ cm

Partie B

Soit S un point de $[RT]$ et H le point de $[RM]$ tel que $(SH)//(TM)$.
On pose $RS = x$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
   x est compris entre 0 et 6.

2. Démontrer que $RH = \frac{5}{3}x$ et $SH = \frac{4}{3}x$.
   Dans le triangle RTM :

$S \in [RT]$
$H \in [RM]$
$(SH)//(TM)$
Donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{RS}{RT} = \dfrac{RH}{RM} = \dfrac{SH}{TM}$.
$\dfrac{x}{6} = \dfrac{RH}{10} = \dfrac{SH}{8}$.
En utilisant : $\dfrac{x}{6} = \dfrac{RH}{10}$, on obtient :
$6 \times RH = 10 \times x$.
Donc $RH = \dfrac{10 \times x}{6} = \dfrac{\cancel{10}^{\,5} x}{\cancel{6}_3} = \dfrac{5x}{3} = \dfrac{5}{3}x$
En utilisant : $\dfrac{x}{6} = \dfrac{SH}{8}$, on obtient :
$6 \times SH = 8 \times x$.
Donc $SH = \dfrac{8 \times x}{6} = \dfrac{\cancel{8}^{4} x}{\cancel{6}_{\,3}} = \dfrac{4x}{3} = \dfrac{4}{3}x$

3. Exprimer, en fonction de x, le périmètre du triangle RSH.
$\mathscr{P}_{RSH} = RS + SH + HR = x + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{5}{3}x = \dfrac{3x}{3} + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{5}{3}x = \dfrac{12x}{3} = 4x$
4. Démontrer que le périmètre du trapèze $STMH$ est égal à : $24 - \dfrac{4}{3}x$.
$\mathscr{P}_{STMH} = ST + TM + MH + SH = 6 - x + 8 + 10 - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{4}{3}x = 24 - \dfrac{3}{3}x - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{4}{3}x = 24 - \dfrac{4}{3}x$

Partie C

On considère les fonctions f et g telles que :

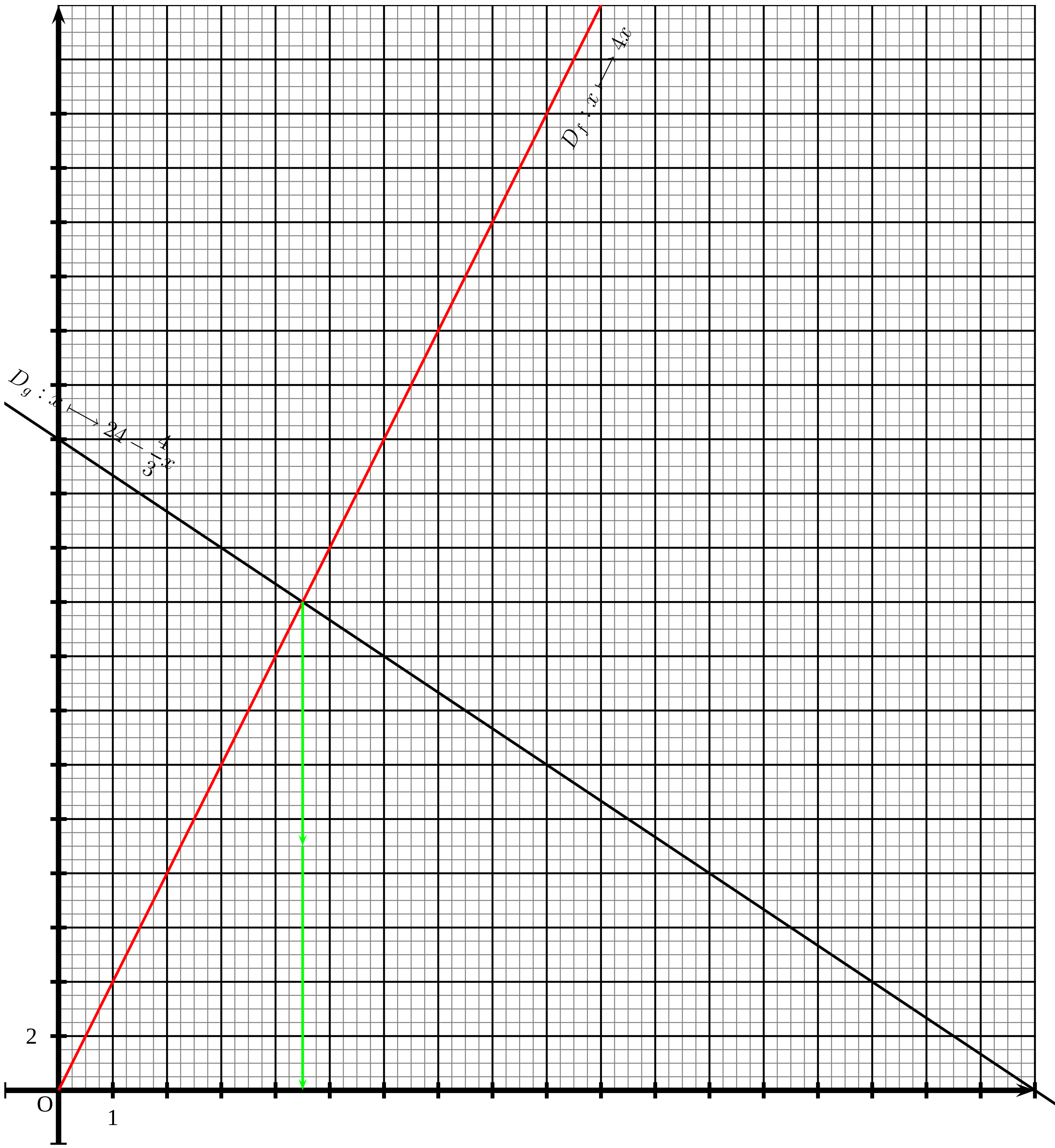
$$f : x \longmapsto 4x \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto 24 - \frac{4}{3}x.$$

1. Calculer $f(0)$, $f(6)$, $g(0)$ et $g(6)$.

$f(0) = 4 \times 0 = 0$
$f(6) = 4 \times 6 = 24$

$g(0) = 24 - \dfrac{4}{3} \times 0 = 24$
$g(6) = 24 - \dfrac{4}{3} \times 6 = 24 - 8 = 16.$

2. Sur la feuille de papier millimétré fournie, représenter graphiquement la fonction f.
3. (a) Déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$.
   Pour que : $f(x) = g(x)$, il faut que :
   $4x = 24 - \dfrac{4}{3}x$
   $4x + \dfrac{4}{3}x = 24$
   $\dfrac{16}{3}x = 24$
   $x = \dfrac{24}{\frac{16}{3}} = 4,5$
   (b) Retrouver cette valeur sur le graphique ; faire apparaître les pointillés nécessaires.
4. Que représente la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ pour la partie B de ce problème ?
La fonction f correspond à la fonction qui traduit le périmètre du triangle RSH.
La fonction g correspond à la fonction qui traduit le périmètre du trapèze STMH.
Donc la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ correspond à la position de S sur [RT] pour que le triangle RSH et le trapèze STMH aient le même périmètre.


$D_f : x \longmapsto 4x$
$D_g : x \longmapsto 24 - \frac{4}{3}x$
2
O
1