CORRECTION CONTROLE COMMUN 3^{e} **2010-2011**

Activités numériques

EXERCICE 1

1) Pour que toutes les fourmis soient utilisées, il faut que le nombre d'équipes divise à la fois le nombre de fourmis noires et le nombre de fourmi rouges.
Il faut donc déterminer le plus grand diviseur commun de 6 510 et de 4 650.
Avec l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(6\,510 ; 4\,650) &= \text{PGCD}(4\,650 ; 1\,860) \\ &= \text{PGCD}(1\,860 ; 930) \\ &= \text{PGCD}(930 ; 0) \\ &= 930 \end{aligned}$$

La reine peut former 930 équipes au maximum.

2) $6\,510 \div 930 = 7$ et $4\,650 \div 930 = 5$
Chaque équipe sera alors constituée de 7 fourmis noires et de 5 fourmis rouges.

3) Soit x la taille d'une fourmi noire en mm.
Une fourmi rouge mesure alors $(x + 2)$ mm.
Les 6 510 fourmis noires forment une file qui mesure $6\,510x$ mm.
Les 4 650 fourmis rouges forment une file qui mesure $4\,650(x + 2)$ mm.
42,78 m = 42 780 mm
D'où l'équation :

$$\begin{aligned} &6\,510x + 4\,650(x + 2) = 42\,780 \\ &6\,510x + 4\,650x + 9\,300 = 42\,780 \\ &11\,160x = 42\,780 - 9\,300 \\ &x = 33\,480 \div 11\,160 \\ &x = 3 \end{aligned}$$

Une fourmi noire mesure 3 mm et une fourmi rouge 5 mm.

EXERCICE 2

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

Je multiplie la 2$^{\text{ième}}$ équation par (-1) : $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ -x - 2y = -8 \end{cases}$

J'additionne membre à membre : $4x = 4$

$x = 1.$

Je remplace x par 1 dans la 2$^{\text{ième}}$ équation : $1 + 2y = 8$

$2y = 7$

$y = 3{,}5.$

Ce système admet pour solution le couple (1 ; 3,5).

2) Dans la 1$^{\text{ère}}$ équation : $10 \times 1 + 4 \times 3{,}5 = 10 + 14 = 24.$
Dans la 2$^{\text{nde}}$ équation : $3 \times 1 + 6 \times 3{,}5 = 3 + 21 = 24.$
Le couple (1 ; 3,5) est donc solution du système $\begin{cases} 10x + 4y = 24 \\ 3x + 6y = 24 \end{cases}$.

3) Soient x le prix d'une perle noire et y le prix d'une perle dorée, en euros.
10 perles noires et 4 perles dorées coûtent $10x + 4y$ euros.
3 perles noires et 6 perles dorées coûtent $3x + 6y$ euros.
D'où le système : $\begin{cases} 10x + 4y = 24 \\ 3x + 6y = 24 \end{cases}$.
D'après la question 2, une perle noire coûte 1 euro et une perle dorée coûte 3,50 euros.
$4 \times 1 + 3 \times 3{,}50 = 4 + 10{,}50 = 14{,}50$
Un sac de 4 perles noires et 3 perles dorées sera vendu 14,50 euros.

EXERCICE 3

On considère l'expression A = $(2x - 5)(x - 3) - 3(2x - 5)$.

1) A = $2x^2 - 6x - 5x + 15 - 6x + 15$

$= 2x^2 - 17x + 30$

2) A = $\boxed{\mathbf{(2x - 5)}\ (x - 3)} - \boxed{3\mathbf{(2x - 5)}}$

$= \mathbf{(2x - 5)}\ [(x - 3) - 3]$

$= (2x - 5)\ (x - 6)$

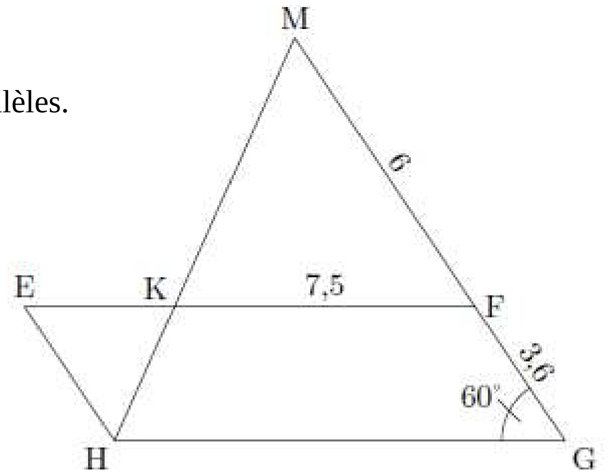
3) Pour $x = \dfrac{5}{2}$: A = $(2 \times \dfrac{5}{2} - 5)\ (\dfrac{5}{2} - 6) = 0$

Pour $x = -1$: A = $2\times(-1)^2 - 17\times(-1) + 30 = 2 + 17 + 30 = 49$

Activités géométriques

EXERCICE 1

Sur la figure, les longueurs utilisées sont en cm.



1) a) On sait que EFGH est un parallélogramme.

Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles.

Donc (KF) // (HG).

b) Dans le triangle MHG,

$K \in [MH]$,

$F \in [MG]$,

(KF) // (HG),

donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{MK}{MH} = \frac{MF}{MG} = \frac{KF}{HG}$$

$$\frac{MK}{MH} = \boxed{\frac{6}{6 + 3{,}6} = \frac{7{,}5}{HG}}$$

D'où HG = $\dfrac{9{,}6 \times 7{,}5}{6}$ = 12 cm.

Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont même longueur.

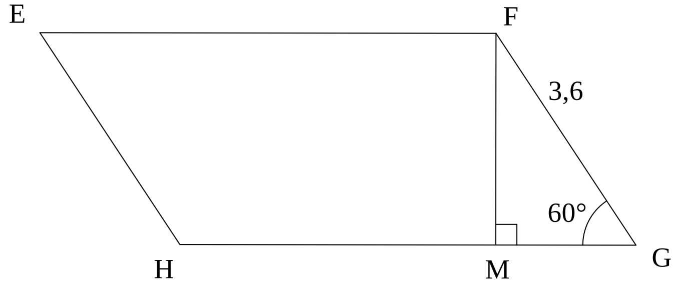
Donc EF = HG = 12 cm.

Et enfin EK = EF – KF = 12 – 7,5 = 4,5 cm.

2) On trace la perpendiculaire à (HG) passant par F.

Elle coupe [HG] en M.

Dans le triangle FGM rectangle en M :



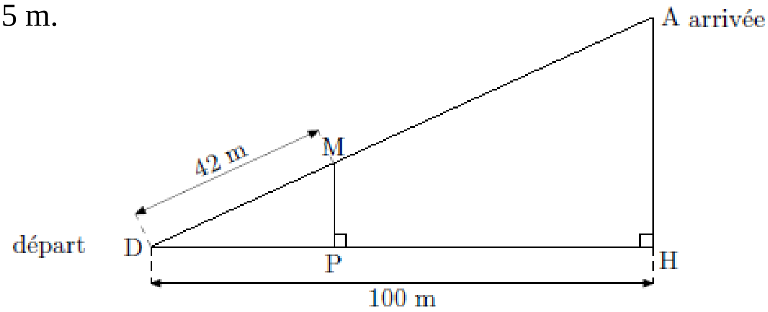
$\sin \widehat{FGM} = \dfrac{FM}{FG}$

$\sin 60° = \dfrac{FM}{3{,}6}$ d'où FM = $3{,}6 \times \sin 60° = 3{,}6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A_{EFGH} = Base × Hauteur = HG × FM = $12 \times 3{,}6 \sin 60° \approx 37{,}41$ cm².

EXERCICE 2

La longueur AD de la voie du funiculaire est de 125 m.



1) Dans le triangle AHD rectangle en H,
d'après le théorème de Pythagore :
$AD^2 = HA^2 + HD^2$
$125^2 = HA^2 + 100^2$
Donc $HA^2 = 125^2 - 100^2 = 5\,625$
Et donc $HA = \sqrt{5\,625} = 75$ m.

2) a) (MP) ⊥ (DH) et (AH) ⊥ (DH).
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (MP) // (AH).

b) Dans le triangle AHD,
M ∈ [DA], P ∈ [DH],
(MP) // (AH),
donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{DM}{DA} = \frac{DP}{DH} = \frac{MP}{AH}$

$\frac{42}{125} = \frac{DP}{100} = \frac{MP}{75}$

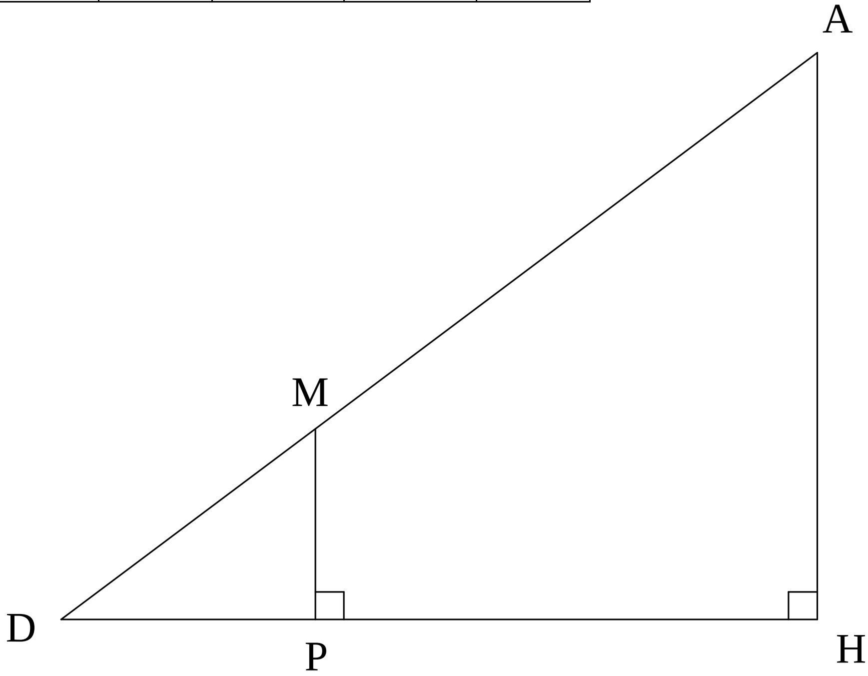
D'où $MP = \frac{42 \times 75}{125} = 25{,}2$ m.

3) Dans le triangle ADH rectangle en H : $\cos \widehat{ADH} = \frac{DH}{DA} = \frac{100}{125} = 0{,}8$.

Et donc $\widehat{ADH} = \arccos 0{,}8 \approx 37°$.

4)

Sur la copie, en cm	1	**4,2**	**10**	**12,5**	**7,5**
Dans la réalité, en cm	1 000	4 200	10 000	12 500	7 500

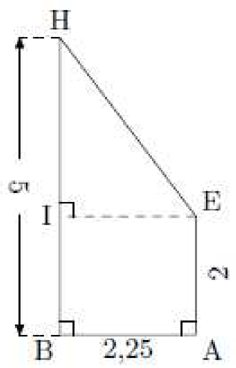


Problème

Partie I

On suppose dans cette partie que AE = 2.

1) HI = HB – IB = 5 – 2 = 3 m.



2) Dans le triangle HIE rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore :

$HE^2 = IH^2 + IE^2$

$= 3^2 + 2{,}25^2$

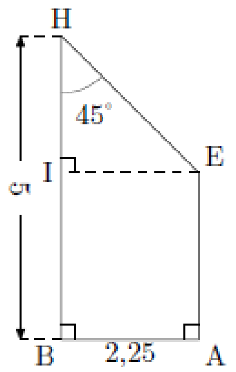
$= 14{,}0625$

Donc HE = $\sqrt{14{,}0625}$ = 3,75 m.

3) Dans le triangle HIE rectangle en I : $\tan \widehat{IHE} = \dfrac{IE}{HI} = \dfrac{2{,}25}{3} = 0{,}75$.

Donc $\widehat{IHE} = \arctan 0{,}75 \approx 37°$.

Partie II



Dans cette partie on suppose que $\widehat{IHE} = 45°$.

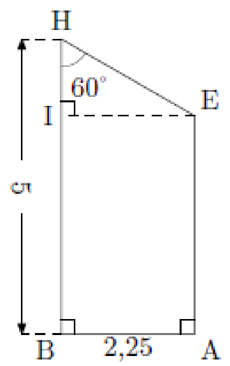
1) $\widehat{IEH} = 90° - 45° = 45° = \widehat{IHE}$

Le triangle IHE est donc rectangle et isocèle en I.

2) Donc HI = IE = 2,25 m.

Et enfin AE = BI = HB – HI = 5 – 2,25 = 2,75 m.

Partie III



Dans cette partie, on suppose que $\widehat{IHE} = 60°$.

1) Dans le triangle HIE rectangle en I : $\tan \widehat{IHE} = \dfrac{IE}{HI}$

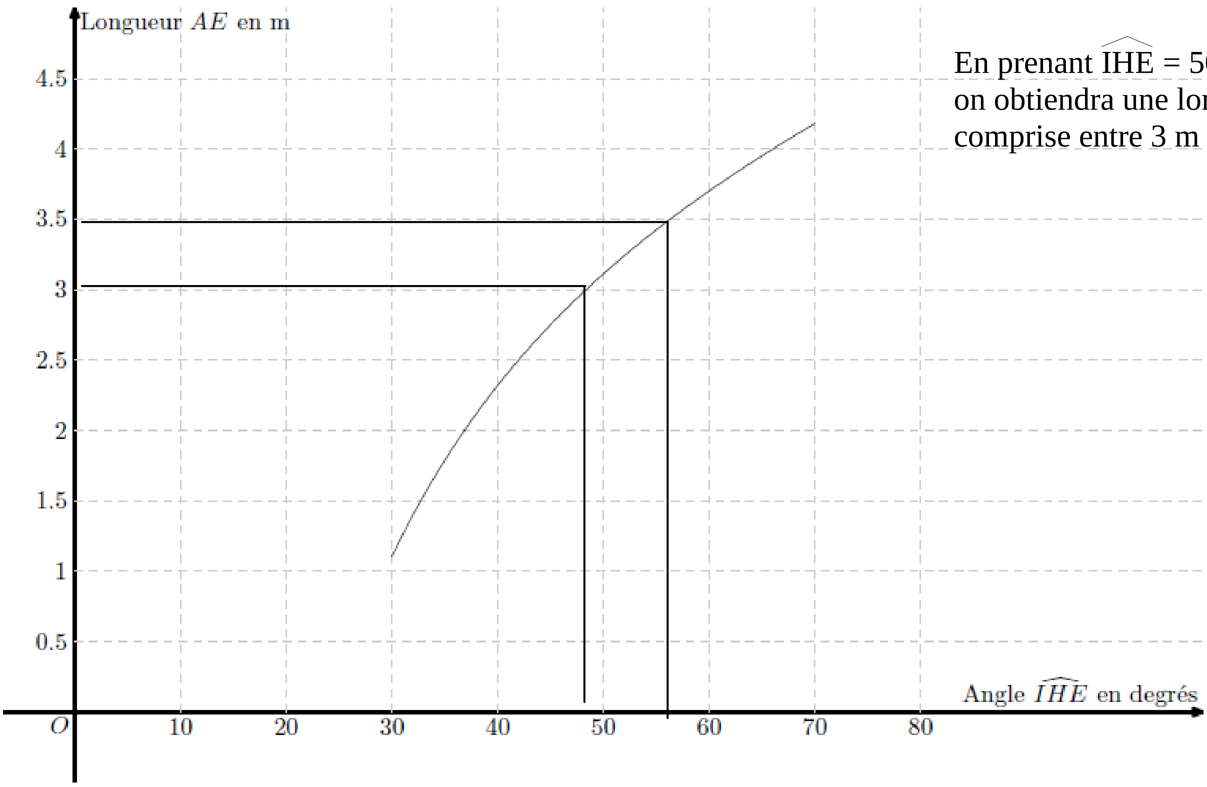
Donc $\tan 60° = \dfrac{2{,}25}{HI}$.

D'où $HI \times \tan 60° = 2{,}25$.

Et donc $HI = \dfrac{2{,}25}{\tan 60°} \approx 1{,}30$ m.

2) AE = BI = HB – HI ≈ 5 – 1,30 = 3,70 m.

Partie III



En prenant $\widehat{IHE} = 50°$ par exemple, on obtiendra une longueur AE comprise entre 3 m et 3,5 m.